4.3. Soluciones e indicaciones a los problemas del Capítulo III

4.3.1. Parte 1

1. $B = \{(1,2,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ es una base pues está formado por tres vectores linealmente independientes. Los vectores de B escritos por columnas dan lugar a la matriz de cambio de base, es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así la fórmula de cambio de base es

$$X = CX'$$

donde X son las coordenadas del vector con respecto a la base canónica B_c y X' con respecto a B. Entonces $(1,2,-4)$ en B tiene coordenadas (x', y', z') donde

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

esto es $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ hallar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

   a) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b) La simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$ hace que los vectores de la base canónica e_1, e_2 y e_3 se transformen en $-e_1, -e_2$ y e_3 respectivamente. Por tanto la matriz de la palicación lineal es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Tomamos como base dos vectores que generen al plano $x - y + z = 0$, y uno normal al mismo, a saber

$$u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, -1, 1)$$

con respecto a esta base la matriz de la aplicación lineal es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pasamos a la base canónica usando para ello la fórmula de cambio

$$X = CX'$$

donde ahora C esta formada, por columnas, por los vectores de la base canónica en coordenadas con respecta la base $B = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, -1, 1)\}$. Por ejemplo,

$$e_1 = (1, 0, 0) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, -1, 1)$$

dará lugar a

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \gamma \\ 0 &= \alpha + \beta - \gamma \\ 0 &= \beta + \gamma \end{aligned}$$

y así $\gamma = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = -\frac{1}{3}$. Por tanto las coordenadas de e_1 en B son

$$e_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Para las de e_2 y e_3 se hace igual y se construye la matriz da cambio de base C. Sin embargo, la matriz de cambio de base de B_c a B es más fácil pues hemos deescribir los vectores de B en coordenadas con respecto a los de B_c; tal matriz es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pero lo importante es que $C^{-1} = D$ o que $D^{-1} = C$. Se comprueba que

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Finalmente la matriz de la aplicación con respecto a B_c es

$$\begin{aligned} A' &= C^{-1}AC \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Para la simetría con respecto a la recta $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$ se procede igual. Se toma una base apropiada con respecto a la cual la matriz de la aplicación sea inemdiata y luego se camabia a B_c. La base que se toma es

$$B = \{u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (0, 1, -1), u_3 = (1, 1, 1)\}$$

y la matriz de la simetría en esta base es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Giro de 90 grados con respecto a la recta $x + y = 0$,$z = 0$.

3.

4.

a) $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2, \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1$

b) $\left\{\begin{pmatrix} -2-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3+\sqrt{5}, \left\{\begin{pmatrix} -2+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3-\sqrt{5}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2+\sqrt{5}, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2-\sqrt{5}$

d) $\left\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \sqrt{2}+1, \left\{\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1-\sqrt{2}, \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2$

5.

a) $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2, \left\{\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \sqrt{2}+1, \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow$ $1-\sqrt{2}$

b) $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33}, \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33}, \left\{\begin{pmatrix} -\frac{13}{8} \\ 1 \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow$ 6

c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3+\sqrt{10},$
$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3-\sqrt{10}$

6.

a) Hay dos autovalores pero uno de ellos tiene asociados dos autovectores l.i.: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3$

b) Idem: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1$

7. Los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son $a, -1, 1$ y por ende es diagonalizable siempre que a sea distinto de -1 y de 1 (ya que habría 3 autovalores diferentes). La forma diagonal sería

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Faltaría ver qué ocurre si a coincide con alguno de estos dos valores.

a) Caso $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los autovectores son

$$u_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

Como da lugar a tres autovectores l.i. la matriz es diagonalizabe y su forma diagonal sería

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Caso $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es obvio que si $b = 0$ la matriz es ya diagonal y si no es así habremos de ver cuáles son sus autovectores. Lo hacemos,

$$\begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sólo se localizan dos autovectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$, luego la matriz no es diagonlaizable en este caso.

8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix},$$

vemos que los autovalores son 2, $-2\sqrt[2]{a}$ y $2\sqrt{a}$, con lo cual si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ entonces hay tres autovalores y tres autovectolres l.i. Falta pues alnalizar los casos $a = 0$ y $a = 1$. Los detalles se pueden completar con facilidad.

9. Para probar que los autovalores de una matriz real y simétrica de orden dos son siempre reales bastará con ver que posee dos autovalores distintos y para ello es preciso que el sicriminante del polinomio característico sea distinto de cero

10. Encontrar la forma diagonal y la matriz de cambio de base correspondiente de las matrices

    a) los autovectores y autovlores son:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3, \left\{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}-3}{\sqrt{17}+5} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}+5}\left(-\sqrt{17}-9\right) \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}\right\}$$

    y

$$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-5} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}-5}\left(-\sqrt{17}+9\right) \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{3}{2}$$

    b)

    c) Para este caso el único autovalor es 2 y la solución de $(A-2Id)\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

    Por tanto la matriz no es diagonalizable.

11. Para

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$, con lo cual podemos responder directamente a cualquier pregunta relacionada con A

12. Para hallar la potencia $n-$ésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

calculamos sus autovalores y autovectores

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow a-b,\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow a+2b$$

Por ello

$$A^n = C\,(A')^n\,C^{-1}$$

con

$$A' = diag(a-b, a-b, a+2b)$$

y

$$C=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

13. El sitema lineal

$$\begin{aligned}u_n &= 3u_{n-1}+3v_{n-1}\\ v_n &= 5u_{n-1}+v_{n-1},\end{aligned}$$

tiene como matriz a

$$A=\begin{pmatrix}3&3\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

Si $u_0 = 1$ y $v_0 = 1$ se deduce (hacerlo!) que

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^n&0\\0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$$

14. Sabemos que $\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 1,\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow -\frac{1}{2}$ y entonces

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-1\\\frac{1}{4}&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-1\\\frac{1}{4}&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$$

15. Si $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ sus autovalores son 1 y 0.5. Además, la matriz de paso es

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \\
&= C\,(A')^k\,C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1/2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{1}{5}2^{1-n} & \frac{3}{5} - \frac{3}{5}2^{-n} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5}2^{1-n} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5}2^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{1}{5}2^{1-n} + \frac{3}{5}\alpha - \frac{3}{5}\alpha 2^{-n} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5}2^{1-n} + \frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}\alpha 2^{-n} \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\alpha \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

cuando $k \to \infty$, Para que el estado límite obtendio sea proporcional a $\overrightarrow{v} = (1, \alpha)$ ha existir k tal que

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\alpha \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k\alpha \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\alpha &= k\frac{5}{3} - 1 \\
\alpha &= k\alpha\frac{5}{2} - 1
\end{aligned}$$

de donde

$$k\frac{1}{3} = k\alpha\frac{1}{2}$$

Esto implica que $\alpha = -1$ y $k = 0$, ó $\alpha = \frac{2}{3}$ y $k \neq 0$.

16.

a) Un cálculo sencillo permite decir que

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & x & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

sii $\lambda = -2$ ó $\lambda = 1 \pm \sqrt{5-2x}$. Así, para que A sea diagonalizable como matriz de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbf{R})$ es preciso que los autovalores sean reales con lo que $5-2x \geq 0$, i.e. $x \leq \frac{5}{2}$. Para todo x así resulta que existiran 3 autovalores distintos siempre que $5-2x \neq 0$ y $1 \pm \sqrt{5-2x} \neq -2$. La igualdades $5-2x = 0$ y $1 \pm \sqrt{5-2x} = -2$ si, y sólo si $x = -2$ y $x = 5/2$. En el primer caso, con $x = -2$, la matriz A es simétrica (y por supuesto real), y se puede probar que en tal situación es diagonalizable; y para el segundo caso hemos de ver la dimensión de $\mathrm{Ker}(A-I)$: como

$$r(A-I) = r \begin{pmatrix} -1 & 5/2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

entonces $\dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = 1$, lo que asegura que sólo habrá un autovector para el autovalor doble $\lambda = 1$. Por ende, para $x = 5/2$ la matriz no es diagonalizable.

De resultas podemos decir que A es diagonlizable, con autovalores -2 y $1 \pm \sqrt{5-2x}$ sii $x < \frac{5}{2}$.

b) El sistema dinámico tiene como matriz a $B = \frac{1}{r}A$ por lo que se tiene que los autovalores de B son $\frac{-2}{r}$ y $\frac{1\pm\sqrt{5-2x}}{r}$. Se demuestra (se omite este detalle) que en cierta base

$$\overrightarrow{y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5-2x}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{5-2x}}{r} \end{pmatrix}^t \overrightarrow{y}_0$$

por lo que $\lim_{t\to\infty} \overrightarrow{y}(t) = \overrightarrow{0}$ sii $\lim_{t\to\infty} \left(\frac{-2}{r}\right)^t = 0$, y $\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1\pm\sqrt{5-2x}}{r}\right)^t = 0$. Esto a su vez equivale a

$$\left|\frac{-2}{r}\right| < 1$$

y

$$\left|\frac{1 \pm \sqrt{5-2x}}{r}\right| < 1.$$

Como r es positivo las desigualdades anteriores se dan sii

$$r > \max\left\{2, 1 + \sqrt[2]{5-2x}\right\}.$$

17. Se pueden calcular los autovectores con sus autovalres correspondientes, son

$$\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{3}{4}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

Por tanto

$$C = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C \left(A'\right)^t C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3/4)^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 64x_0 \left(3/4\right)^t + x_0 - 8 \left(3/4\right)^t y_0 \\ -8x_0 \left(3/4\right)^t + \left(3/4\right)^t y_0 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si $n \to \infty$.

18. El modelo se rige por la edo

$$v = k(t - t_0)$$

con $v = \frac{dT}{dt}$ y $t_0 = 20$, esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$$

Resolvemos la EDO$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$. Se trata de una ecuación lineal por lo que buscamos soluciones del tipo $T\left(t\right) = u\left(t\right) v\left(t\right)$. Llevando esta T a la EDO obtenemos

$$u'v + v'u = kuv - 20k$$

i.e.

$$u'v + u\left(v' - kv\right) = -20k$$

Hacemos $v' - kv = 0$ y con la v resultante resolvemos $u'v = -20k$. La primera ecuación tiene como solución $v = \exp(kv)$ y la segunda es por tanto $u' \exp(kv) = -20k$, i.e.

$$u' = -20k \exp(-kv)$$

que tiene como solución general a

$$u = 20\exp(-kv) + C$$

con C una constante cualquiera.
Entonces la solución general de la EDO lineal inicial es

$$\begin{aligned} T &= uv = (20\exp(-kv) + C)\exp(kv) \\ &= C\exp(kv) + 20. \end{aligned}$$

Si en $t = 0$ la temperatura es $T = 100$, y en $t = 20$ es $T = 60$ se deben cumplir las ecuaciones

$$C = 80, 40 = C\exp(20k)$$

Así $40 = 80\exp(20k)$, y por ende $\exp k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$ y $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.
Para calcular el tiempo que tiene que transcurrir hasta conseguir 30^o hacemos

$$30 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

de donde se sigue $t = 20\frac{\ln 8}{\ln 2} = 60$.

19. Que $y = \frac{C_1}{x} + C_2$ es solución de la EDO $y'' + \left(\frac{2}{x}\right)y' = 0$ es inmediato pues con una tal y tenemos que sus derivadas son

$$y' = \frac{-C_1}{x^2},\ y'' = \frac{2C_1}{x^3}.$$

Sustituimos esto en la ecuación y verificamos la identidad

$$y'' + \left(\frac{2}{x}\right)y' = \frac{2C_1}{x^3} + \left(\frac{2}{x}\right)\frac{-C_1}{x^2} = 0.$$

20. Básicamente, la estrategia consiste en dejar de un lado toda expresión que dependa de x junto con dx y lo mismo con y y dy.

a) $ydx - xdy = 0$ es lo mismo que escribir

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Integrando a ambos lados tenemos

$$\log Cx = \log Dy$$

i.e. $Cx = \exp(\log Dy) = Dy$, y por tanto $y = C_1x$ es la solución buscada (C_1 es una constante arbitraria)

b) $dx-(1-x)\,dy=0$ equivale a

$$\frac{dx}{1-x}=dy$$

y por consiguiente

$$-\log(1-x)+C=y$$

c) $(1+y^2)dx-\sqrt{x}dy=0$ se puede escribir como

$$x^{-1/2}dx=\frac{dy}{(1+y^2)}$$

Integramos y queda

$$\frac{x^{-3/2}}{-3/2}+C=\arctan y$$

i.e.

$$y=\tan\left(\frac{x^{-3/2}}{-3/2}+C\right)$$

21. Para encontrar las soluciones de ecuaciones lineales de primer orden se propone el método propuestoen el problema 1: consiste en buscar soluciones con el formato $y\,(x)=u\,(x)\,v\,(x)$.

a) Si $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$ el método nos lleva a la identidad

$$u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x+1}\right)=(x+1)^2$$

Vemos que entonces basta con resolver

$$v'-\frac{2v}{x+1}=0$$

y

$$u'v=(x+1)^2\,.$$

Para resolver $v'-\frac{2v}{x+1}=0$ reescribimos la ecuación como una EDO de variables separadas: hacemos

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x+1}$$

ó

$$\frac{dv}{2v}=\frac{dx}{x+1}$$

y así $\log v = 2\log\left(C\left(x+1\right)\right)$. Por tanto

$$v = C\left(x+1\right)^2$$

Basta con tomar $v = \left(x+1\right)^2$. Resolvemos ahora $u'v = \left(x+1\right)^2$ con la u encontrada:

$$u'\left(x+1\right)^2 = \left(x+1\right)^2$$

lo que da $u' = 1$, por ende $u = x + C$. La solución general es

$$y = \left(x+C\right)\left(x+1\right)^2$$

b) En el caso

$$\left(x-x^2\right)\frac{dy}{dx} + \left(2x^2-1\right)y = 2x^2$$

la identidad que resulta después del cambio $y = uv$ es

$$\left(x-x^2\right)\left(u'v+uv'\right) + \left(2x-1\right)uv = 2x^3$$

i.e.

$$\left(x-x^2\right)u'v + \left(\left(2x-1\right)v + \left(x-x^2\right)v'\right)u = 2x^3$$

La primera EDO a resolver será

$$\frac{dv}{v} = \frac{1-2x^2}{x-x^2}dx^1 \tag{4.1}$$

Una solución de esta ecuación es

$$v = e^{2x}(x-x^2)$$

Resta por integrar la EDO

$$\left(x-x^2\right)e^{2x}(x-x^2)u' = 2x^3$$

[1] $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{1-2x^2}{x-x^2}dx$ da

$$\begin{aligned}
\log v &= \int \frac{1-2x+2x-2x^2}{x-x^2}dx \\
&= \int \frac{1-2x}{x-x^2}dx + \int \frac{2x-2x^2}{x-x^2}dx \\
&= \log(x-x^2) + 2x
\end{aligned}$$

i.e.

$$u = \int \frac{2x^3}{(x-x^2)\,e^{2x}(x-x^2)}dx$$

Así la solución es

$$y = \left(\int \frac{2x^3}{(x-x^2)\,e^{2x}(x-x^2)}dx + C\right) e^{2x}(x-x^2)$$

c) Como la solución general de $y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$, es

$$y = x^2\left((1 + Ce^{1/x}\right)$$

y la condición inicial es $y(1/2) = 1$,i.e

$$(1/2)^2\left((1 + Ce^2\right) = 1$$

entonces $C = \frac{3}{e^2}$ y la sol. particular pedida es

$$y = x^2\left((1 + \frac{3}{e^2}e^{1/x}\right)$$

d) La solución general de $y' + \frac{2}{x}y = \frac{a}{x^2}$ (a es una constante), $y\,(1) = 2$ es

$$y = x^{-2}\,(ax + C)$$

En efecto, si $y = uv$ entonces

$$(u'v + uv') + \frac{2}{x}uv = ax^{-2}$$

y las EDO's son

$$\begin{aligned} \frac{2}{x}v + v' &= 0 \\ u'v &= ax^{-2} \end{aligned}$$

La primera,

$$\frac{dv}{v} = \frac{-2}{x}dx$$

i.e. $\log v = -2\log x$, o lo que es lo mismo, $v = x^{-2}$.Luego de conseguir v resolvemos la 2^a EDO para localizar u :

$$u'x^{-2} = ax^{-2}$$

lo que da $u = ax + C$. Como $y\,(1) = 2$ entonces

$$2 = (a + C)$$

y $C = 2 - a$.La solución particular es

$$y = x^{-2}\,(ax + 2 - a)$$

22. Resuelve los siguientes problemas:

    a) Para el sistema[2] $\left\{ \begin{array}{l} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y \end{array} \right.$ hacemos la suma de las dos ecuaciones resultando

    $$x' + y' = -2(x + y),$$

    por lo que si definimos $z = x + y$ entonces la EDO previa se lee

    $$z' = -2z$$

    y por consiguiente $z = C_1 \exp(-2x)$.Usamos una de los dos ecuaciones, digamos que la segunda $y' = -x - 3y$. Ésta se reescribe como

    $$\begin{aligned} y' &= -x - y - 2y \\ &= -z - 2y \\ &= -C_1 \exp(-2x) - 2y \end{aligned}$$

    en definitiva, tenemos

    $$\frac{dy}{dx} = -C_1 \exp(-2x) - 2y$$

    una EDO lineal que se resuelve buscando y de la forma $y = uv$. La solución general es

    $$y = (C_2 - xC_1)\, e^{-2x}$$

    Finalmente queda por resolver $z = x+y = C_1 \exp(-2x)$, pero esto es inmediato:

    $$x = (C_1 - C_2 + xC_1)\, e^{-2x}$$

    b) La matriz del sistema es

    $$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

    cuyos autovalores y autovectores son

    $$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\leftrightarrow -6 - i, \\ \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\leftrightarrow -6 + i \end{aligned}$$

[2] Este ejemplo no se recoge dentro de las situaciones explicadas en clases teóricas ya que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ asociada al sistema no es diagonalizable. Explicamos un método alternativo.

Si diagonalizamos el sistema con la matriz de cambio

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta que la forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} -6-i & 0 \\ 0 & -6+i \end{pmatrix} = C^{-1}AC$$

En la base formada por los autovectores el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = -7x+y \\ y' = -2x-5y \end{array} \right.$,i.e.

$$X' = AX$$

(ahora X' es la derivada del vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) se escribe

$$Z' = DZ$$

que es lo mismo que

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-i & 0 \\ 0 & -6+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

[3]Esto da como solución general

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \exp(-6-i) \\ C_2 \exp(-6+i) \end{pmatrix}$$

Por tanto la sol. general compleja es

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = CZ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \exp(-6-i)\,t \\ C_2 \exp(-6+i)\,t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) C_1 e^{(-6-i)t} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) C_2 e^{(-6+i)t} \\ C_1 e^{(-6-i)t} + C_2 e^{(-6+i)t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[3]Tengamos en cuenta que las coordenadas de Z y las d X se relacionana mediante la ecuación de cambio de base

$$X = CZ$$

Para buscar las soluciones reales calculamos dos soluciones particulares en la expresión anterior y operamos con ellas: una haciendo $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, y otra con $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$. Estas soluciones son

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{(-6-i)t} \\ e^{(-6-i)t} \end{pmatrix} \\ X_2 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)e^{(-6+i)t} \\ e^{(-6+i)t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Operamos con éstas para definir otras que ya son reales:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{X_1+X_2}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{(-6-i)t} \\ e^{(-6-i)t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)e^{(-6+i)t} \\ e^{(-6+i)t} \end{pmatrix} \\ &= e^{-6t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos t+\sin t) \\ \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{X_1-X_2}{2i} = \frac{e^{-6t}}{2i}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\exp(-it) \\ e^{-it} \end{pmatrix} - \frac{e^{-6t}}{2i}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\exp(it) \\ e^{it} \end{pmatrix} \\ &= e^{-6t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos t-\sin t) \\ -\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La sol. general es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= C_1Y_1 + C_2Y_2 \\ &= Ce^{-6t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos t+\sin t) \\ \cos t \end{pmatrix} + De^{-6t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos t-\sin t) \\ -\sin t \end{pmatrix} \\ &= e^{-6t}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}D\right)\cos t + \left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}D\right)\sin t \\ C\cos t - D\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Resolvemos el sitema

$$\begin{cases} x' = 2x+2y \\ y' = x+3y \end{cases}, (x(0), y(0)) = (2,3)$$

que escrito en forma compacta es

$$X' = AX$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalizamos $A : D = C^{-1}AC$ ó $A = CDC^{-1}$ donde

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Así $X' = AX$ se transforma en

$$X' = CDC^{-1}X$$

que equivale a

$$C^{-1}X' = DC^{-1}X$$

esto es

$$Z' = DZ$$

siendo $Z' = C^{-1}X'$ y $Z = C^{-1}X$. Si $Z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ entonces el sistema precedente es

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

Sabemos que la solución general de éste es

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \exp t \\ C_2 \exp 4t \end{pmatrix}$$

De $Z = C^{-1}X$ se sigue que la solución general es

$$X = CZ = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \exp(t) \\ C_2 \exp(4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1e^t + C_2e^{4t} \\ C_1e^t + C_2e^{4t} \end{pmatrix}$$

Como además debe cumplirse la condición inical $(x(0), y(0)) = (2, 3)$ entonces

$$\begin{aligned} 2 &= -2C_1 + C_2 \\ 3 &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Se tiene que $C_2 = \frac{8}{3}, C_1 = \frac{1}{3}$, y la solución particular pedida es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^t + \frac{8}{3}e^{4t} \\ \frac{1}{3}e^t + \frac{8}{3}e^{4t} \end{pmatrix}$$

23. El método para las EDO's lineales homogéneas de orden dos consiste en convertirlas en sistemas de dos EDO's de orden 1.

   a) Si $y'' - 7y' + 12y = 0$ hacemos
$$y' = \frac{dy}{dx}$$
y entonces
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -12y + 7y'$$
Juntamos las dos ecuaciones:
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' \\ \frac{dy'}{dx} &= -12y + 7y' \end{aligned}$$
ó
$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy'}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$
Este sistema tiene como matriz a
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$
Los autovalores son 3 y 4, y los autovectores asociados son $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ respectivamente. La solución es
$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \exp(3t) \\ C_2 \exp(4t) \end{pmatrix}$$
La única coordenada que nos interesa es la primera,
$$y(t) = C_1 \exp(3t) + C_2 \exp(4t)$$

   b) Si $y'' + 6y' + 5y = 0$ el sistema asociado tiene como matriz a
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$
La matriz de paso es
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

y los autovalores son 1 y -5. La solución general es

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \exp(t) \\ C_2 \exp(-5t) \end{pmatrix}$$

La solución del problema es

$$y(t) = C_1 \exp(t) + C_2 \exp(-5t)$$

c) $y'' + 4y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ se transforma en un sistema de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual tiene como matriz de paso a

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y autovalores a $2i, -2i$. Esto nos lleva a considerar soluciones complejas que más tarde manipularemos para obtener reales. La solución general compleja es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \exp(2it) \\ C_2 \exp(-2it) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\left(C_1 e^{2it} - C_2 e^{-2it}\right) \\ C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nos fijamos sólo en y, en

$$y = -\frac{1}{2}i\left(C_1 e^{2it} - C_2 e^{-2it}\right)$$

de la que sacamos dos particulares

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}ie^{2it} \\ x_2 &= \frac{1}{2}ie^{-2it} \end{aligned}$$

y con éstas fabricamos las reales

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{2it} + \frac{1}{2}ie^{-2it}}{2} = \frac{1}{2}\sin 2t \\ y_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{2it} - \frac{1}{2}ie^{-2it}}{2i} = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{aligned}$$

La solución general es

$$y = C_1 \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{C_2}{2} \cos 2t.$$

Resta por ajustar $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$: la primera da $C_1 \frac{1}{2} \sin 2 - \frac{C_2}{2} \cos 2 = 1$ y la segunda $C_1 \cos 2 + C_2 \sin 2 = 0$. Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante y obtenemos $C_1 = 2 \sin 2$, $C_2 = -2 \cos 2$ e

$$y = \sin 2 \sin 2t + \cos 2 \cos 2t = \sin (2 + 2t)$$

24. Al ser no homogéneas la situación es un poco más complicada. La solución general de una EDO no homogénea se escribe como suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea. Para encontrar una solución particular de la no homogénea se procede po el método de variación de constantes.

    a) Para resolver $y'' - y = 5x + 2$ primero solventamos la homogénea asociada: $y'' - y = 0$ se resuelve mediante el método explicado en la pregunta precedente. La solución general de $y'' - y = 0$ es

    $$y(x) = C \exp(x) + D \exp(-x)$$

    Para encontrar la particular de $y'' - y = 5x + 2$ buscamos una con el formato

    $$y(x) = C(x) \exp(x) + D(x) \exp(-x)$$

    y para ello hacemos las derivadas: en la primera derivada

    $$\begin{aligned} y' &= Ce^x + C'e^x - De^{-x} + D'e^{-x} \\ &= Ce^x - De^{-x} + C'e^x + D'e^{-x} \end{aligned}$$

    suponemos que $C'e^x + D'e^{-x} = 0$, por tanto

    $$\begin{aligned} y'' &= \left(Ce^x - De^{-x}\right)' \\ &= Ce^x + De^{-x} + C'e^x - D'e^{-x} \end{aligned}$$

    Llevamos las expresiones a la EDO

    $$Ce^x + De^{-x} + C'e^x - D'e^{-x} - Ce^x - De^{-x} = 5x + 2$$

    lo que da

    $$C'e^x - D'e^{-x} = 5x + 2$$

Por tanto nos quedan dos expresiones:

$$\begin{aligned} C'e^{x} + D'e^{-x} &= 0 \\ C'e^{x} - D'e^{-x} &= 5x+2 \end{aligned}$$

Resolvemos despejando C' y D' : $C' = \frac{1}{2}\frac{5x+2}{e^{x}}$, $D' = -\frac{1}{2}(5x+2)\,e^{x}$. Entonces

$$C = \int C'dx = \frac{1}{2}\int \frac{5x+2}{e^{x}}dx = -\frac{5}{2}e^{-x}x - \frac{7}{2}e^{-x}$$

y

$$D = \int D'dx = -\frac{1}{2}\int (5x+2)\,e^{x}dx = -\frac{5}{2}e^{x}x + \frac{3}{2}e^{x}$$

Entonces la solución paticular es

$$y_0 = y_0(x) = \left(-\frac{5}{2}e^{-x}x - \frac{7}{2}e^{-x}\right)\exp(x) + \left(-\frac{5}{2}e^{x}x + \frac{3}{2}e^{x}\right)\exp(-x)$$

y la general

$$\begin{aligned} y(x) &= C\exp(x) + D\exp(-x) \\ &\quad + \left(-\frac{5}{2}e^{-x}x - \frac{7}{2}e^{-x}\right)\exp(x) + \left(-\frac{5}{2}e^{x}x + \frac{3}{2}e^{x}\right)\exp(-x) \end{aligned}$$

b) La solución general de $y'' - 3y' = 0$ es

$$y = C\exp(3x) + D$$

y la paricular

$$y_0 = C(x)\exp(3x) + D(x)$$

Siguiendo los pasos del ejercicio anterior llegaremos al sistema

$$\begin{aligned} C'e^{3x} + D' &= 0 \\ 3C'e^{3x} &= 2-6x \end{aligned}$$

Se obtiene

$$C' = -\frac{2}{3}\frac{-1+3x}{e^{3x}}$$

y

$$D' = -\frac{2}{3} + 2x$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} C &= \int C' dx = -\frac{2}{3}\int \frac{-1+3x}{e^{3x}} dx = \frac{2}{3}e^{-3x}x \\ D &= \int D' dx = \int \left(-\frac{2}{3}+2x\right) dx = -\frac{2}{3}x + x^2 \end{aligned}$$

e

$$y_0(x) = x^2$$

que es una solución particular. La general es

$$y = y_0(x) + C\exp(3x) + D$$

c) Nos ocupamos de $y'' - 7y' + 6y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Resolvemos $y'' - 7y' + 6y = 0$ y para ello hacemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = -6y + 7y' \end{aligned}$$

que en forma vectorial es

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy'}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Como los autovectores y autovalores son

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 6$$

Entonces el problema diagonal tiene como solución

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\exp(6t) \\ C_2\exp(t) \end{pmatrix}$$

y el no diagonal

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} &= C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1\exp(6t) \\ C_2\exp(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^{6t} + C_2e^t \\ 6C_1e^{6t} + C_2e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución general de la EDO homogénea es

$$y\left(t\right)=Ce^{6t}+De^{t}$$

Buscamos la sol gen no homo. con el formato $y=C\left(x\right)e^{6x}+D\left(x\right)e^{x}$ hacenos su primera derivada

$$y'=6Ce^{6x}+De^{x}+D'e^{x}+C'e^{6x}$$

imponemos

$$C'e^{6x}+D'e^{x}=0$$

y hacemos la segunda:

$$y''=36Ce^{6x}+6C'e^{6x}+De^{x}+D'e^{x}$$

Lo ponemos en la edo $y''-7y'+6y=\sin x$ y queda

$$\begin{aligned}36Ce^{6t}+6C'e^{6t}+De^{t}+D'e^{t}-7\left(6Ce^{6t}+De^{t}\right)+6\left(Ce^{6t}+De^{t}\right) &= \sin x\\ 36Ce^{6t}+De^{t}-7\left(6Ce^{6t}+De^{t}\right)+6\left(Ce^{6t}+De^{t}\right)+6C'e^{6t}+D'e^{t} &= \sin x\\ 6C'e^{6t}+D'e^{t} &= \sin x\end{aligned}$$

De resultas tenemos

$$\begin{aligned}C'e^{6x}+D'e^{x} &= 0\\ 6C'e^{6x}+D'e^{x} &= \sin x\end{aligned}$$

que da $C'=\frac{1}{5}\frac{\sin x}{e^{6x}}, D'=-\frac{1}{5}\frac{\sin x}{e^{x}}$; entonces

$$\begin{aligned}C &= \int\frac{1}{5}\frac{\sin x}{e^{6x}}dx=-\frac{1}{185}e^{-6x}\cos x-\frac{6}{185}e^{-6x}\sin x\\ D &= \int-\frac{1}{5}\frac{\sin x}{e^{x}}dx=\frac{1}{10}e^{-x}\cos x+\frac{1}{10}e^{-x}\sin x\end{aligned}$$

y la sol general del probelma no homogeno es

$$\begin{aligned}y &= Ce^{6x}+De^{x}+\\ &\quad+\left(\int\frac{1}{5}\frac{\sin x}{e^{6x}}dx\right)e^{6x}+\left(\int-\frac{1}{5}\frac{\sin x}{e^{x}}dx\right)e^{x}\\ &= Ce^{6x}+De^{x}+\\ &\quad\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{185}\right)\cos x+\left(\frac{1}{10}-\frac{6}{185}\right)\sin x\end{aligned}$$

Si $y(0) = 1$ entonces

$$C + D + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{185} \right) = 1$$

y si $y'(0) = 0$

$$6C + D + \left(\frac{1}{10} - \frac{6}{185} \right) = 0$$

Así $D = \frac{11}{10}$, $C = -\frac{36}{185}$ y por tanto

$$y = -\frac{36}{185} e^{6x} + \frac{11}{10} e^{x} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{185} \right) \cos x + \left(\frac{1}{10} - \frac{6}{185} \right) \sin x.$$